Vitalkapacitet

```
library(mosaic)
```

I denne øvelse analyseres et datasæt vedrørende vitalkapacitet, som er den maksimale luftmængde, der kan udåndes efter en maksimal indånding. Datasættet kan hentes via dette link, og gemmes i samme mappe som denne Rmd-fil, så du kan køre tingene helt på din egen computer. Alternativt kan du også bare indlæse data direkte fra web-adressen, hvor det så hentes hver gang du kører kommandoen (f.eks. ved at trykke "knit"):

```
vitcap <- read.delim("http://asta.math.aau.dk/dan/static/datasets?file=vitcap.txt")
vitcap <- vitcap %>% mutate(exposure = as.factor(exposure))
```

I datasættet findes variablen `vital.capacity`, som er blevet målt for 84 arbejdere i cadmiumindustrien.

En yderligere variabel er faktoren `exposure`, som har 3 niveauer, der angiver, hvor længe den enkelte arbejder har været eksponeret for cadmium:

- A: Ingen eksponering
- B: Mindre end 10 år
- C: Mere end 10 år

Derudover inderholder datasættet også variablen `age`, der angiver den enkelte arbejders alder. (Og yderligere dummy-variablene `z1` og `z2`, som er beskrevet i ekstraopgaven, hvor de benyttes.)

Opgave 1 (ANOVA-analyse af exposures effekt på vitalkapacitet)

Lav en analyse, der undersøger effekten af faktoren `exposure` på responsen `vital.capacity`. Dvs. en lineær model på formen:

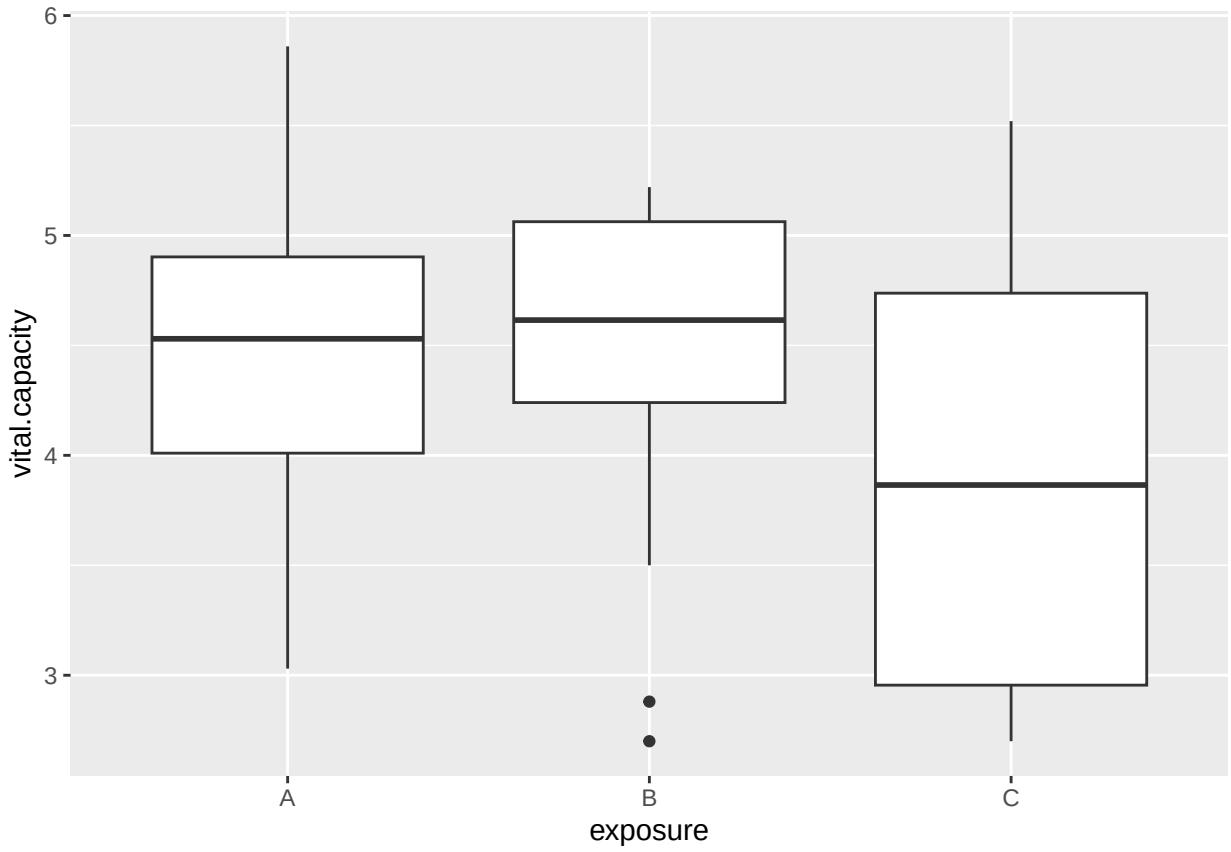
$$y = \alpha + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon$$

hvor z_1 og z_2 er dummy variable der indikerer om man er hhv. i gruppe B og C.

Du bør som minimum:

- Lave et relevant boxplot.

```
gf_boxplot(vital.capacity ~ exposure, data = vitcap)
```



- Lave summary af modellen.

```
model1 <- lm(vital.capacity ~ exposure, data = vitcap)
summary(model1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = vital.capacity ~ exposure, data = vitcap)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.77179 -0.45205  0.09808  0.51295  1.57083
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  4.46204    0.11223  39.757   <2e-16 ***
## exposureB    0.00974    0.17997   0.054   0.9570
## exposureC   -0.51288    0.24245  -2.115   0.0375 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.7445 on 81 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.05767,    Adjusted R-squared:  0.0344
## F-statistic: 2.478 on 2 and 81 DF,  p-value: 0.09021
```

- Opskriv prædiktionsligningen

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 z_1 + \hat{\beta}_2 z_2$$

hvor du indsætter tallene fra det tidligere summary for parameterestimaterne.

$$\hat{y} = 4.46 + 0.01z_1 - 0.51z_2$$

- Hvad er den forventede forskel i lungekapacitet mellem personer i gruppe A og C? $\hat{\beta}_2 = -0.51$ dvs. vi forventer at lungekapaciteten er 0.51 **lavere** i gruppe C end i referencegruppen A.
- Gennemgå F-testen for ingen effekt af `exposure` (findes i slutningen af summary):
  - Hvad er nulhypotesen? ($H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$, dvs. alle tre grupper har samme middel vitalkapacitet $\mu_A = \mu_B = \mu_C$. Bemærk at $\mu_A = \alpha$, $\mu_B = \alpha + \beta_1$ og $\mu_C = \alpha + \beta_2$).
  - Hvad er test-statistikken? ($F_{\text{obs}} = 2.48$)
  - Hvad er p-værdien? ($p = 0.09$)
  - Hvilken konklusion træffer vi om den samlede effekt af exposure på vitalkapaciteten? (Der er ikke nok evidens til at forkaste H_0. Den samlede forskel mellem grupperne målt ved F-værdien er ikke større end det kan forklares ved tilfælding samplingvariation.)

Opgave 2 (Additiv model for alders og exposures effekt på vitalkapacitet)

Vi udvider nu analysen til også at omfatte arbejdernes alder (`age`) som en forklarende variabel for responsen `vital.capacity`.

Tilpas en model hvor `age` og `exposure` indgår additivt:

$$y = \alpha + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 x + \varepsilon$$

hvor x er alder og z_1 og z_2 angiver hhv. gruppe B og C som før.

```
model2 <- lm(vital.capacity ~ age + exposure, data = vitcap)
summary(model2)
```

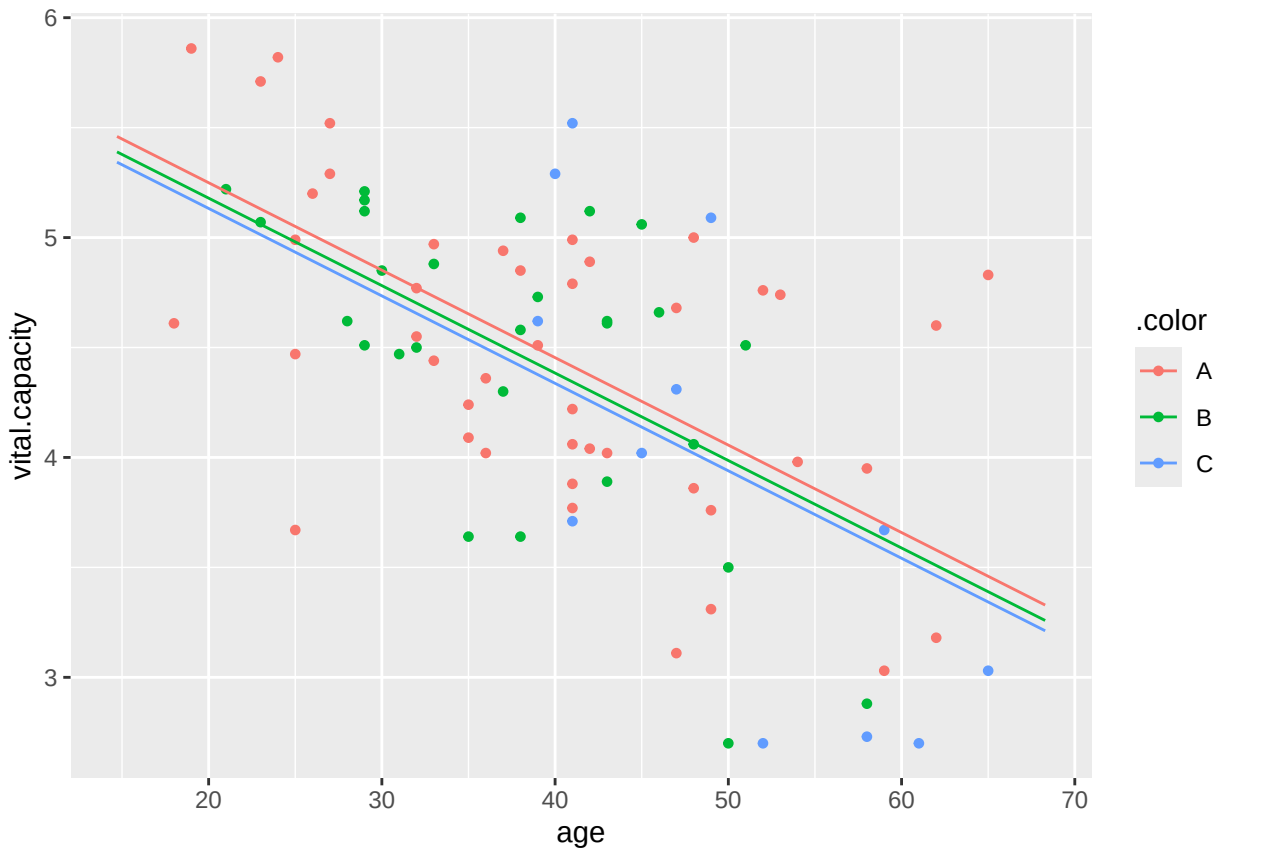
```
##
## Call:
## lm(formula = vital.capacity ~ age + exposure, data = vitcap)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.38054 -0.38050  0.01321  0.37909  1.37047
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  6.044917   0.268025  22.554  < 2e-16 ***
## age         -0.039775   0.006322  -6.291 1.57e-08 ***
## exposureB   -0.070198   0.148669  -0.472    0.638
## exposureC   -0.116935   0.209236  -0.559    0.578
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.6127 on 80 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3696, Adjusted R-squared:  0.3459
## F-statistic: 15.63 on 3 and 80 DF,  p-value: 4.323e-08
```

Gennemgå detaljerne for denne model:

- Illustrer modellen grafisk med f.eks. `plotModel()`. (Tip: Vær opmærksom på, at `plotModel` forventer, at den definerede model har den kontinuerte variabel `age` til at stå først i formeludtrykket. Så hvis man vil plotte regressionslinjerne for den additive model, så skal man bruge formalutrykket `vital.capacity ~ age + exposure`, når man tilpasser sin model, og IKKE `vital.capacity ~ exposure + age`. De

to formeludtryk repræsenterer ganske vist præcis den samme additive model, men den bagvedliggende kode i funktionen `plotModel` virker desværre kun efter hensigten, hvis `age` står først.)

```
plotModel(model2)
```



- Med udgangspunkt i outputtet af et `summmary` for modellen:
  - Indsæt talværdier i den samlede prædiktionsligning.

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 z_1 + \hat{\beta}_2 z_2 + \hat{\beta}_3 x$$

$$\hat{y} = 6.04 - 0.07 z_1 - 0.12 z_2 - 0.04 x$$

  - Opskriv prædiktionsligningerne for hver af de tre grupper (hint: indsæt værdierne for dummyvariable og lad led med 0 udgå).

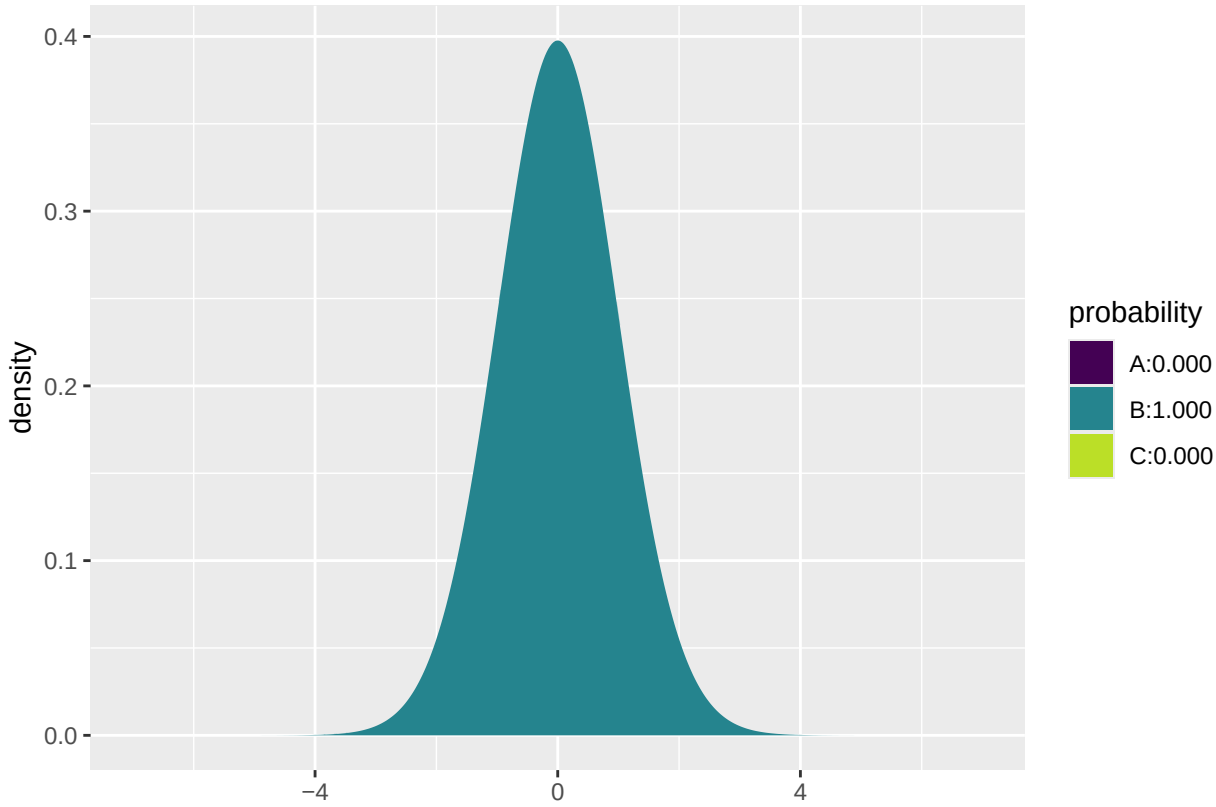
$$A: \quad \hat{y} = 6.04 - 0.04x$$

$$B: \quad \hat{y} = 6.04 - 0.07 - 0.04x = 5.97 - 0.04x$$

$$C: \quad \hat{y} == 6.04 - 0.12 - 0.04x = 5.92 - 0.04x$$

  - Hvad er den forventede vitalkapacitet for en arbejder på 40 år i gruppe B? ($5.97 - 0.04 \cdot 40 = 4.38$ med afrunding.)
  - Hvor meget forventes vitalkapaciteten at ændre sig årligt for en arbejder i gruppe C? Hvad med for dem i gruppe A og B? (For gruppe C er den forventede ændring per år $\hat{\beta}_3 = -0.04$. Den er den samme for gruppe A og B da der ikke er interaktion.)
  - Er effekten af alder signifikant? Gennemgå herunder teststørrelse og p-værdi og hvordan disse hænger sammen. (Ja, $t_{\text{obs}} = \hat{\beta}_3/(se) = -0.04/0.0063 = -6.29$ giver en to-halet p-værdi i t-fordelingen med 80 frihedsgrader på 1.57×10^{-8}.)

```r
pdist("t", df = 80, q = c(-6.26, 6.26), xlim = c(-7,7))
```




```
## [1] 8.988382e-09 1.000000e+00
```

```
+ Er der en signifikant forskel mellem gruppe A og B? Hvad med A og C?
Nej, parallelforskydningerne mellem A og B samt mellem A og C er ikke sigifikante som ses af p-værdierne
```

Opgave 3 (Interaktionsmodel for alders og exposures effekt på vitalkapacitet)

Vi udvider nu analysen til også at tillade en interaktion mellem alders og exposures effekt på vitalkapaciteten.

Tilpas en model hvor `age` og `exposure` indgår med interaktionseffekt

$$y = \alpha + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 x + \beta_4 z_1 x + \beta_5 z_2 x + \varepsilon$$

hvor x er alder og z_1 og z_2 angiver hhv. gruppe B og C som før.

```r
model3 <- lm(vital.capacity ~ age * exposure, data = vitcap)
summary(model3)
```

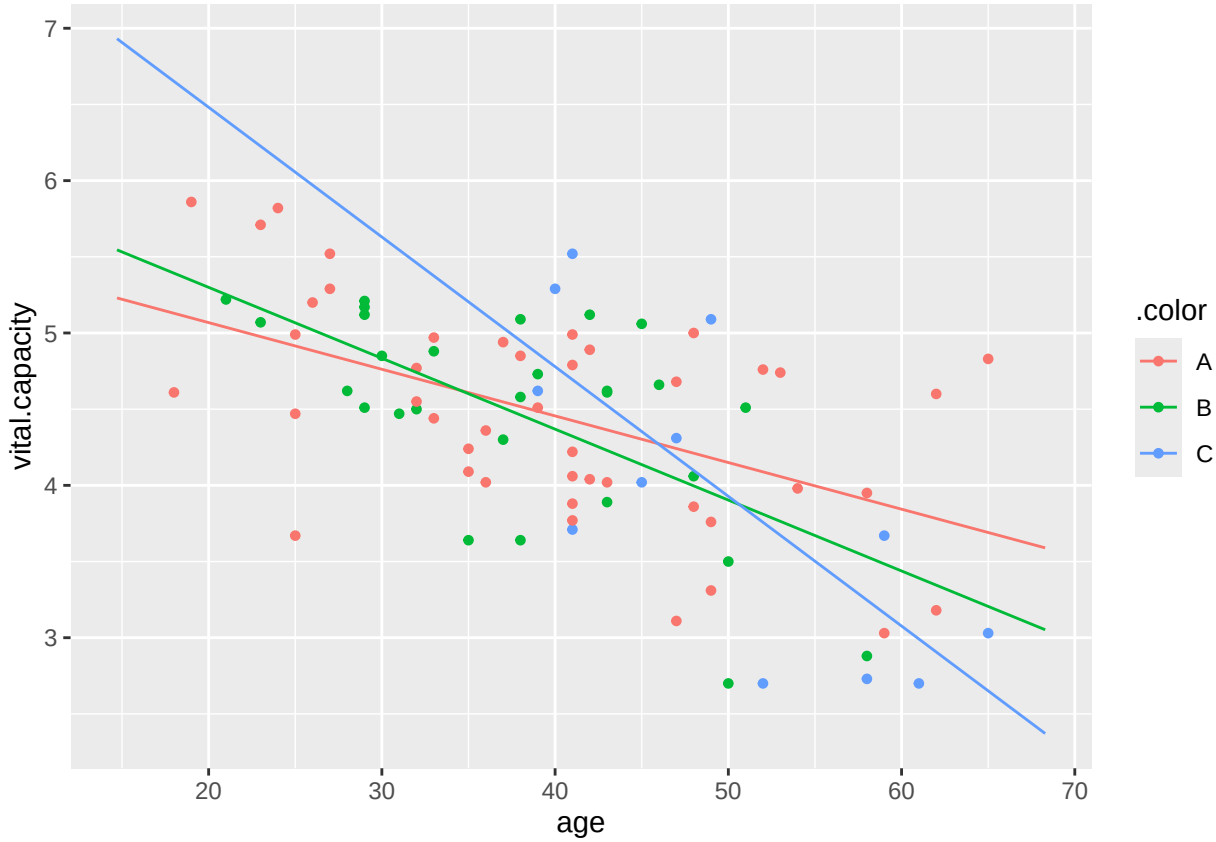
```
##
## Call:
## lm(formula = vital.capacity ~ age * exposure, data = vitcap)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.24497 -0.36929  0.01977  0.43681  1.13953
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    5.680291   0.313426  18.123  < 2e-16 ***
```

```
## age           -0.030613   0.007547  -4.056 0.000117 ***
## exposureB      0.549740   0.575884   0.955 0.342728
## exposureC      2.503148   1.041842   2.403 0.018655 *
## age:exposureB -0.015919   0.014547  -1.094 0.277170
## age:exposureC -0.054498   0.021070  -2.587 0.011554 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5942 on 78 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.422,  Adjusted R-squared:  0.385
## F-statistic: 11.39 on 5 and 78 DF,  p-value: 2.871e-08
```

Gennemgå detaljerne for denne model:

- Illustrer modellen grafisk med f.eks. `plotModel()` som før.

```
plotModel(model3)
```



- Med udgangspunkt i outputtet af et `summmary` for modellen:
  - Indsæt talværdier i den samlede prædiktionsligning.

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 z_1 + \hat{\beta}_2 z_2 + \hat{\beta}_3 x + \hat{\beta}_4 z_1 x + \hat{\beta}_5 z_2 x$$

$$\hat{y} = 5.68 + 0.55 z_1 + 2.50 z_2 - 0.03 x - 0.02 z_1 x - 0.05 z_2 x$$

  - Opskriv prædiktionsligningerne for hver af de tre grupper (hint: indsæt værdierne for dummyvariable og lad led med 0 udgå).

$$A: \quad \hat{y} = 5.68 - 0.03x$$

$$B: \quad \hat{y} = 5.68 + 0.55 - 0.03x - 0.02x = 6.23 - 0.05x$$

$$C: \quad \hat{y} = 5.68 + 2.50 - 0.03x - 0.05x = 8.18 - 0.08x$$

- Hvad er den forventede vitalkapacitet for en arbejder på 40 år i gruppe B? ($6.23 - 0.05 \cdot 40 = 4.37$ med afrunding)
- Hvor meget forventes vitalkapaciteten at ændre sig årligt for en arbejder i gruppe C? Hvad med for dem i gruppe A og B? (Gr C: $\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_5 = -0.03 - 0.05 = -0.08$. Gr A: $\hat{\beta}_3 = -0.03$. Gr B: $\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 = -0.03 - 0.02 = -0.05$)
- Er der signifikant forskel i effekten af alder mellem gruppe A og B? Hvad med mellem A og C? (Nej, ikke forskel mellem A og B pga. p-værdi på 0.277. Ja, forskel mellem A og C pga. p-værdi på 0.012)
- Brug `anova()` til at undersøge om der samlet set er en signifikant interaktion mellem effekten af exposure og alder på vitalkapaciteten.

```
anova(model2, model3)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: vital.capacity ~ age + exposure
## Model 2: vital.capacity ~ age * exposure
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F  Pr(>F)
## 1     80 30.035
## 2     78 27.535  2    2.4995 3.5402 0.03376 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

(Vi afviser $H_0 : \beta_4 = \beta_5 = 0$ med p-værdi på 0.03, dvs. der er signifikant interaktion mellem effekten af alder og exposure på vitalkapaciteten)

Opfølgende spørgsmål:

Hvordan kan det være, at det i opgavens første model (uden `age` som forklarende variabel) ser ud som om, at vi kan tillade os at slå de tre `exposure`-grupper sammen, mens det modellerne med `age` som forklarende variabel ikke ser sådan ud?

En måde at anskue fænomenet på er ved at starte med at betragte den mest komplekse model med interaktionen mellem `age` og `exposure`. Her er `age` meget signifikant og ser altså ud til at forklare `vital.capacity` bedre end `exposure`, men gennem forrige F-test af interaktionens signifikans, så ser det samtidig ud til, at der er en interaktion, hvorfor `exposure` også er en nødvendig variabel i modellen. Vælger vi nu at smide den meget signifikante variabel `age` ud af vores model, så får vi `model1`, der nødvendigvis har en ringere forklaringskraft - man kan sige, at dens forklaringskraft er så ringe, at den ikke bliver væsentligt dårligere af, at man slår alle tre `exposure`-grupper sammen til én gruppe.

Ekstraopgave (hvis du har tid)

Datasættet indeholder også dummy-variabler for faktoren `exposure`:

- `z1=1` hvis `exposure=B` ellers 0
- `z2=1` hvis `exposure=C` ellers 0

Betragt følgende to modeller:

```
model4 <- lm(vital.capacity ~ age*z2, data = vitcap)
model5 <- lm(vital.capacity ~ age*z1 + age*z2, data = vitcap)
```

- Brug en F-test til at vise, at der ikke er nogen signifikant forskel mellem `model4` og `model5` (Hint: bruge `anova()`).

```
anova(model4, model5)
```

```
## Analysis of Variance Table
```

```
##
## Model 1: vital.capacity ~ age * z2
## Model 2: vital.capacity ~ age * z1 + age * z2
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1     80 28.020
## 2     78 27.535  2   0.48468 0.6865 0.5064
```

- Giv en fortolkning af forskellen mellem de to modeller.

Ved hjælp af dummy-variablene `z1` og `z2` kan vi inddele data i `exposure`-grupperne, og `model4` svarer således til, at gruppe A og B er blevet slået sammen til én samlet gruppe, mens `model5` faktisk er identisk med vores tidligere `model3`. For at lave ovenstående F-test kunne vi således lige så godt have skrevet `anova(model4, model3)`, og hvis vi udskriver `summary(model5)`, så får vi nøjagtigt de samme estimater, som da vi udskrev `summary(model3)` (koefficienternes navne er dog ændret til dummy-variablenes navne).

I forbindelse med det sidste spørgsmål kan du lave følgende plot:

```
gf_point(vital.capacity ~ age, data = vitcap, color = ~ factor(z2)) %>%
  gf_smooth(method = "lm", se = F) %>%
  gf_labs(color = "Gruppe C")
```